Université Abdelmalek Essaâdi
ENSA d'Al-Hoceima.
A. BOUJRAF

Filières : AP2
Matière : Analyse numérique
Année Universitaire : 19/20.

Feuille de TD $n°1$

Exercice 1. En résolvant un système linéaire, trouver le polynôme vérifiant $p(0) = 1$, $p(1) = 2$ et $p(2) = 0$.

Exercice 2. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $(n+1)$ abscisses réelles deux à deux distinctes. On appelle $j^{\text{ème}}$ polynôme de Lagrange associé aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ le polynôme de degré n qui pour $x \in \mathbb{R}$ et $j = 0, 1, \ldots, n$ est défini par :

$$L_j(x) := \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \Big(\frac{x - x_i}{x_j - x_i}\Big).$$

1. Montrer que $L_0, L_1, \ldots, L_n$ forment une base de $\mathbb{P}_n$.
2. Soit $p \in \mathbb{P}_n$, écrire p dans la base $\{L_j\}_{j=0,\ldots,n}$.
3. Montrer que pour tout réel x, on a $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} L_j(x) = 1$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} x_j L_j(x) = x$.

Exercice 3. Soient f une fonction vérifiant $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 3$ et $f(3) = 2$ et p le polynôme interpolant f aux points $0, 1, 2, 3$.

1. Déterminer le polynôme p en utilisant la base de Lagrange.
2. Déterminer le polynôme p en utilisant la base de Newton.

Exercice 4.

1. Ecrire le polynôme $p(x) = 1 - x + x^2$ dans la base de Lagrange associée aux points $-1,\ 2,\ 3$.
2. Ecrire dans la base de Lagrange le polynôme q qui vaut $-55,\ 104,\ 1.063$ en $-1,\ 2,\ 3$.
3. Ecrire le polynôme $p(x) = 1 - x + x^2$ dans la base de Newton associée aux points $-1,\ 2,\ 3$.
4. Trouver r le polynôme qui vaut $3,\ 3,\ 7,\ 8$ en $-1,\ 2,\ 3,\ 4$.
5. Quels sont les "avantages" et les "inconvenants" des bases de Lagrange et de Newton ?

Exercice 5. Soient $x_0,\ x_1 \in \mathbb{R}$, f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur $[x_0,\ x_1]$ et p un polynôme de degré 1 vérifiant $p(x_0) = f(x_0)$ et $p(x_1) = f(x_1)$. On suppose que $|f''(x)| \leq M$, $\forall x \in [x_0,\ x_1]$ et on pose $e(x) = f(x) - p(x)$.

Pour $x \in]x_0,\ x_1[$, on considère $q(t) = p(t) + \frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)(x-x_1)}(t - x_0)(t - x_1)$ et $F(t) = q(t) - f(t)$.

1. En utilisant le théorème de Rolle, montrer qu'il existe $\xi \in]x_0,\ x_1[$ tel que $F''(\xi) = 0$.
2. En déduire que $e(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2} f''(\xi)$ et que $\|e(x)\|_\infty \leq \frac{M}{8}(x_1 - x_0)^2$.

Rappel : $\|e(x)\|_\infty = \sup_{x\in[x_0,\ x_1]} |e(x)|$.

Exercice 6. Soient $N \in \mathbb{N}$, f la fonction définie sur $[1,\ 2]$ par $f(x) = \sqrt{x}$, $x_j = 1 + jh$ où $j = 0, 1, \ldots, N$ et $h = \frac{1}{N}$. Soit également $i \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ et P_i le polynôme interpolant f en $x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1}$. Pour $x \in [x_{i-1},\ x_{i+1}]$ et $t \in [i-1,\ i+1]$, on pose $x = 1 + th$, $g_i(x) = (x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})$ et $\phi_i(t) = (t - i + 1)(t - i)(t - i - 1)$.

1. Donner l'expression de l'erreur d'interpolation $e_i(x) := f(x) - P_i(x)$ puis montrer que $|e_i(x)| \leq \frac{h^3}{8}$.
2. Etablir le tableau de variation de la fonction $t \longmapsto \phi_i(t)$ pour $t \in [i-1,\ i+1]$.
3. Vérifier que $g_i(x) = h^3\phi_i(t)$ et en déduire que $|e_i(x)| \leq \frac{h^3}{24\sqrt{3}}$ pour tout $x \in [x_{i-1},\ x_{i+1}]$.
4. Comment choisir N pour que l'erreur d'interpolation soit inférieur ou égale à $\varepsilon = 5.10^{-8}$.

Exercice 7. Soit $P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ le polynôme d'interpolation d'une fonction f relatif aux abscisses réelles distinctes $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et aux valeurs $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$, c-à-d,

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\},\ \ P_n(x_i) = f(x_i) = y_i.$$

1. Montrer que les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de P_n sont donnés par la résolution du système linéaire $V_n a = y$ où
$$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_n = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}.$$
2. Calculer $det(V_1)$, $det(V_2)$ et $det(V_3)$ puis montrer que $det(V_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.
3. En déduire que le polynôme d'interpolation P_n est unique.

Exercice 8 (Interpolation d'Hermite). Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soient $d+1$ points distincts $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_d \leq b$. On appelle polynôme d'interpolation d'Hermite (PIH) associé à f et aux noeuds x_i un polynôme $H \in \mathbb{R}_{2d+1}[X]$ qui vérifie

$$H(x_i) = f(x_i),\ H'(x_i) = f'(x_i) \text{ pour tout } i = 0, \ldots, d.$$

1. Donner l'expression de H lorsque $d = 0$.
2. Donner l'expression d'un système linéaire dont les inconnues sont les coefficients de H dans la base des monômes.
3. Calculer le déterminant de ce système. En déduire que le PIH existe et est unique.
Indication : on utilisera la définition de la dérivée $H'(x_i) = \lim_{h\to 0} \frac{H(x_i+h) - H(x_i)}{h}$ pour se ramener à un déterminant de Vandermonde.
4. Étant donné une fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, de classe C^1 sur $[a, b]$ qui possède une dérivée seconde sur $]a, b[$, et telle que $g(a) = g'(a) = g(b) = 0$, montrer qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $g''(\xi) = 0$.
5. On suppose que $f \in C^{2d+2}([a, b])$. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$. il existe $\xi \in]a, b[$ tel que
$$f(x) - H(x) = \frac{f^{(2d+2)}(\xi)}{(2d+2)!} \prod_{i=0}^{d} (x - x_i)^2. \tag{1}$$
Indication : considérer la fonction $q(t) = H(t) - f(t) + \frac{f(x) - H(x)}{\prod_{i=0}^{d}(x - x_i)^2} \prod_{i=0}^{d}(t - x_i)^2$ qui possède $d + 1$ zéros doubles et 1 zéro simple.
6. Pour tout $0 \leq i \leq d$, donner l'expression des polynômes H_i et $K_i \in \mathbb{R}_{2d+1}[X]$ qui vérifient
$$H_i(x_i) = 1,\ H_i'(x_i) = 0,\ H_i(x_j) = 0,\ H_i'(x_j) = 0,\ 0 \leq j \leq d,\ j \neq i.$$
$$K_i(x_i) = 0,\ K_i'(x_i) = 1,\ K_i(x_j) = 0,\ K_i'(x_j) = 0,\ 0 \leq j \leq d,\ j \neq i.$$
Montrer que ces polynômes constituent une base de $\mathbb{R}_{2d+1}[X]$ et donner l'expression du PIH associé à f et aux noeuds x_i dans cette base.

Solution 8. $H \in \mathbb{R}_{2d+1}[X]$ l'interpolant d'Hermite en $a \leq x_0 < x_l < \cdots < x_d \leq b$:

$$H(x_i) = f(x_i) \text{ et } H'(x_i) = f'(x_i), \;\; i = 0, \ldots, d.$$

1. Pour $d = 0$, $H \in \mathbb{R}_1[X]$ c'est le polynôme d'Hermite tq :

$$H(x_0) = f(x_0) \text{ et } H'(x_0) = f'(x_0). \tag{2}$$

   Alors, $H(x) = a(x - x_0) + b$ en utilisant (2), on trouve

$$a = f'(x_0) \text{ et } b = f(x_0).$$

2. $H \in \mathbb{R}_{2d+1}[X] \Rightarrow H(x) = \sum_{j=0}^{2d+1} a_j x^j$. Les équations

$$H(x_i) = f(x_i) \text{ et } H'(x_i) = f'(x_i), \;\; i = 0, \ldots, d.$$

   sont équivalentes au système suivant :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{2d+1} a_j x_i^j = f(x_i), & i = 0, \ldots, d. \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{2d+1} j a_j x_i^{j-1} = f'(x_i), & i = 0, \ldots, d. \end{cases}$$

   Matriciellement, on obtient

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{2d+1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{2d+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_d & x_d^2 & \ldots & x_d^{2d+1} \\ 0 & 1 & 2x_0 & \ldots & (2d+1)x_0^{2d} \\ 0 & 1 & 2x_1 & \ldots & (2d+1)x_1^{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 2x_d & \ldots & (2d+1)x_d^{2d} \end{pmatrix}}_{\mathcal{H}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_d \\ a_{d+1} \\ a_{d+2} \\ \vdots \\ a_{2d+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_d) \\ f(x_{d+1}) \\ f(x_{d+2}) \\ \vdots \\ f(x_{2d+1}) \end{pmatrix}.$$

3. Puisque $kx^{k-1} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^k - x^k}{h}$, alors

$$|\mathcal{H}| = \lim_{h\to 0} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{2d+1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{2d+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_d & x_d^2 & \dots & x_d^{2d+1} \\ 0 & \frac{(x_0+h)-x_0}{h} & \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} & \dots & \frac{(x_0+h)^{2d+1}-x_0^{2d+1}}{h} \\ 0 & \frac{(x_1+h)-x_1}{h} & \frac{(x_1+h)^2-x_1^2}{h} & \dots & \frac{(x_1+h)^{2d+1}-x_1^{2d+1}}{h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \frac{(x_d+h)-x_d}{h} & \frac{(x_d+h)^2-x_d^2}{h} & \dots & \frac{(x_d+h)^{2d+1}-x_d^{2d+1}}{h} \end{vmatrix}$$

$$= h^{-(d+1)} \lim_{h\to 0} \mathcal{V}(x_0, x_1, \dots, x_d, x_0+h, x_1+h, \dots, x_d+h), \text{ où } \mathcal{V} \text{ est le déterminant de Vandermonde.}$$

$$= h^{-(d+1)} \lim_{h\to 0} \left(\prod_{0\le i<j\le d} (x_j - x_i) \times \prod_{0\le i,j\le d} \Big((x_j+h) - x_i\Big) \times \prod_{0\le i<j\le d} \Big((x_j+h) - (x_i+h)\Big) \right)$$

$$= h^{-(d+1)} \lim_{h\to 0} \left(\prod_{0\le i<j\le d} (x_j - x_i)^2 \times \prod_{0\le i<j\le d} \Big((x_j+h) - x_i\Big) \times \prod_{0\le i<j\le d} \Big((x_i+h) - x_j\Big) h^{(d+1)} \right)$$

$$= (-1)^{\frac{d(d+1)}{2}} \lim_{h\to 0} \left(\prod_{0\le i<j\le d} (x_j - x_i)^2 \times \prod_{0\le i<j\le d} \Big((x_j - x_i)^2 - h^2\Big) \right)$$

$$= (-1)^{\frac{d(d+1)}{2}} \prod_{0\le i<j\le d} (x_j - x_i)^4 \neq 0, \quad \text{car } x_i \neq x_j.$$

D'où l'existence et l'unicité du PIH.

4. C'est juste le théorème de Rolle.

5. Considérons la fonction

$$q(t) = H(t) - f(t) + \frac{f(x) - H(x)}{\prod_{i=0}^{d} (x - x_i)^2} \prod_{i=0}^{d} (t - x_i)^2$$

q possède $d+1$ racines doubles $x_0, x_1, \dots, x_d$, et une racine simple $t = x$.
D'après la question précédente, on déduit que $\exists \xi \in]a, b[$ tq :

$$q^{(2d+2}(\xi) = 0.$$

Cela est équivalent à (1).

6. Pour $0 \le i \le d$, on a $H_i \in \mathbb{R}_{2d+1}[X]$ et

$$H_i(x_i) = 1,\ H_i'(x_i) = 0,\ H_i(x_j) = 0,\ H_i'(x_j) = 0,\ 0 \le j \le d,\ j \neq i.$$

Alors, H_i possède d racines doubles $x_j,\ j = 0, 1, \dots, d,\ j \neq i$, i.e.

$$H_i(x) = [a(x - x_i) + b] \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{d} (x - x_j)^2.$$

Or, $H_i(x_i) = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)^2}$ et $H_i'(x_i) = 0 \Rightarrow a = b\sum_{j\neq i}\frac{2}{x_j-x_i}$.
D'où

$$H_i(x) = \left[1 + 2\sum_{j\neq i}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\right]\prod_{j\neq i}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)^2.$$

Pour K_i, on a

$$K_i(x_i) = 0,\ K_i'(x_i) = 1,\ K_i(x_j) = 0,\ K_i'(x_j) = 0,\ \ 0 \leq j \leq d,\ j \neq i.$$

i.e. K possède d racines doubles x_j, $j \neq i$ et une racine simple x_i. Alors

$$K_i(x) = C(x-x_i)\prod_{j\neq i}(x-x_j)^2.$$

En utilisant le faite que $K_i'(x_i) = 1$, il est facile de voir que $C = \frac{1}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)^2}$.
On déduit que

$$K_i(x) = C(x-x_i)\prod_{j\neq i}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)^2.$$

Le polynôme d'interpolation d'Hermite s'écrit :

$$H(x) = \sum_{i=0}^{d}\Big(f(x_i)H_i(x) + f'(x_i)K_i(x)\Big).$$